

① نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ در بازه $[a, b]$ وارون پذیر است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f(x) = |x+1| - |x-5| = \begin{cases} 6 & x > 5 \\ 2x-4 & -1 \leq x \leq 5 \\ -6 & x < -1 \end{cases}$$

پس بزرگترین بازه‌ای که تابع در آن یک‌به‌یک است، بازه $[-1, 5]$ است.

در نتیجه: $\Rightarrow \text{Max}(b-a) = 5 - (-1) = 6$

② اگر $(f \circ g^{-1})^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ و $f(x) = 3x-1$ باشد، حاصل $g(\frac{1}{3})$ کدام است؟

 $\frac{-3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{-1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

به کمک رابطه $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ می‌توان نوشت:

$$g \circ f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

برای محاسبه $g(\frac{1}{3})$ باید $f^{-1}(x)$ را برابر $\frac{1}{3}$ قرار دهیم یا به عبارتی مقدار $f^{-1}(\frac{1}{3})$ مطلوب است. پس: $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = f(\frac{1}{3})$

$$f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3}) - 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{1}{3}$$

$$g(\frac{1}{3}) = g(f^{-1}(0)) = \frac{2(0)+1}{0-3} = \frac{-1}{3}$$

③ دو تابع $f = \{(5, 2), (4, 4), (3, 5)\}$ و $g(x) = 3x+1$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(2f^{-1}(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$g^{-1}(2f^{-1}(a)) = 3 \Rightarrow 2f^{-1}(a) = g(3) \xrightarrow{g(3)=10} 2f^{-1}(a) = 10$$

$$\xrightarrow{\div 2} f^{-1}(a) = 5 \Rightarrow a = f(5) \Rightarrow a = 2$$

۴ ضابطه وارون تابع $y = -\sqrt{x+4} - 3$ در کدام گزینه آمده است؟

(۲) $y = -x^2 + 6x + 5, x \leq -3$

(۴) $y = -x^2 + 6x + 5, x \geq -2$

(۱) $y = x^2 + 6x + 5, x \leq -3$

(۳) $y = x^2 + 6x + 5, x \geq -2$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا برد تابع را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x+4} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+4} \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+4} - 3 \leq -3 \Rightarrow y \leq -3$$

بنابراین دامنه وارون تابع برابر $x \leq -3$ است.

حال ضابطه وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = -\sqrt{x+4} - 3 \Rightarrow y + 3 = -\sqrt{x+4}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} (y+3)^2 = x+4$$

$$x = y^2 + 6y + 5 \xrightarrow[y \rightarrow x]{x \rightarrow y} y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = x^2 + 6x + 5; x \leq -3 \text{ : وارون تابع}$$

۵ اگر $f^{-1} = \{(3,1), (2,-1), (4,3)\}$ و $g(x) = x^3 + x$ باشد، حاصل $g^{-1}(f(-1))$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) -۱

(۲) صفر

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$f^{-1}(2) = -1$ است پس $f(-1) = 2$ می‌شود. ما حاصل $g^{-1}(f(-1))$ یعنی $g^{-1}(2)$ را می‌خواهیم. پس باید $g(x)$ را برابر ۲ بگذاریم:

$$g(x) = x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow g^{-1}(2) = 1$$

۶) کدام تابع یک به یک نیست؟

$$y = 2^x - 3^{-x} \quad (۲)$$

$$y = x^3 + x \quad (۴)$$

$$y = \sqrt{x} + |x+2| \quad (۱)$$

$$y = x^4 - x^2 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

در گزینه «۱» هم $\sqrt{x}$ و هم $|x+2|$ با شرط $(x \geq 0)$ اکیداً صعودی‌اند، پس جمع آن‌ها نیز اکیداً صعودی و یک به یک است.

در گزینه «۲» 2^x و -3^{-x} اکیداً صعودی‌اند.

در گزینه «۴» x هم و هم x^3 اکیداً صعودی‌اند.

در گزینه «۳»، به ازای $x = 0$ و $x = 1$ داریم: $y = 0$.

۷) تابع $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$ مفروض است. حاصل جمع طول نقاط برخورد دو تابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$y = \frac{x+2}{2x-3} \Rightarrow 2xy - 3y = x+2 \Rightarrow x(2y-1) = 3y+2$$

$$\Rightarrow x = \frac{3y+2}{2y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{2x-1} = \frac{x+2}{2x-3} \Rightarrow 6x^2 - 5x - 6 = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x - 4 = 0 \Rightarrow \text{جمع طول نقاط برخورد} = 2$$

۸) اگر $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$ و $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{1}{x}f(x)$ باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

۴) $g(x) = \frac{1}{-2x+3}$

۳) $g(x) = \frac{2}{-2x+5}$

۲) $g(x) = \frac{1}{2x-3}$

۱) $g(x) = \frac{1}{-2x+5}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا وارون تابع $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow xy - y = 2x \Rightarrow xy - 2x = y$$

$$\Rightarrow x(y - 2) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(g(x)) = \frac{1}{x}f(x) \Rightarrow \frac{2g(x)}{g(x)-1} = \frac{1}{x}(2x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{2g(x)}{g(x)-1} = \frac{1}{x-2}$$

$$2xg(x) - 2g(x) = g(x) - 1 \Rightarrow 2xg(x) - 5g(x) = -1$$

$$\Rightarrow g(x)(2x - 5) = -1 \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{2x-5} = \frac{1}{-2x+5}$$

۹) در تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x+a}$ ، مقدار a را طوری انتخاب کرده‌ایم که f^{-1} بر f منطبق باشد، مقدار a کدام است؟

۴) ۲

۳) $-1/5$

۲) -2

۱) $1/5$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مسئله را با نقطه‌گذاری حل می‌کنیم:

با توجه به تعریف تابع وارون می‌دانیم که اگر $(a, b) \in f$ آن‌گاه $(b, a) \in f^{-1}$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+a} \Rightarrow f\left(\frac{-3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \in f$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}} \left(0, -\frac{3}{2}\right) \in f^{-1}$$

به دلیل آن‌که تابع f و f^{-1} بر هم منطبق هستند، پس: $f(0) = f^{-1}(0)$

$$f(0) = f^{-1}(0) \xrightarrow{f^{-1}(0) = -\frac{3}{2}} f(0) = \frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{-3}{2} \Rightarrow a = -2$$

۱۰) اگر f و g توابعی وارون‌پذیر، با دامنه و برد R باشند و داشته باشیم: $f^{-1}(g(4)) = 5$ و $g^{-1}(f^{-1}(3)) = 4$ ؛ آن‌گاه حاصل $f(f(5))$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

دقت کنید که برای تابع وارون‌پذیر h اگر $h(x_0) = y_0$ آن‌گاه $h^{-1}(y_0) = x_0$. در این مسئله:

$$f^{-1}(g(4)) = 5 \Rightarrow f(5) = g(4) \quad (*)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $x_0 \quad y_0$

$$g^{-1}(f^{-1}(3)) = 4 \Rightarrow g(4) = f^{-1}(3) \quad (**)$$

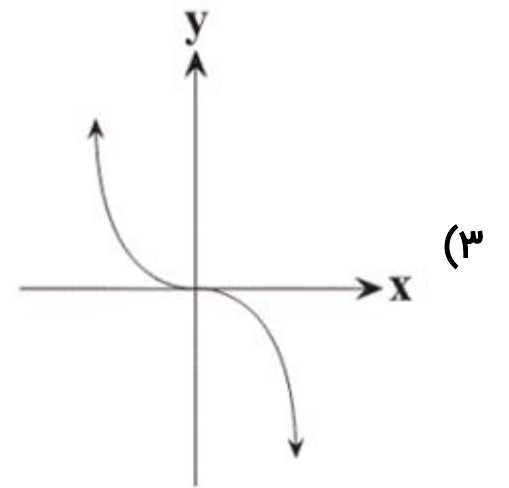
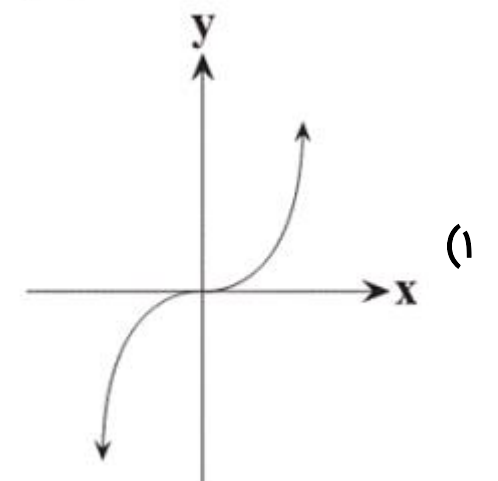
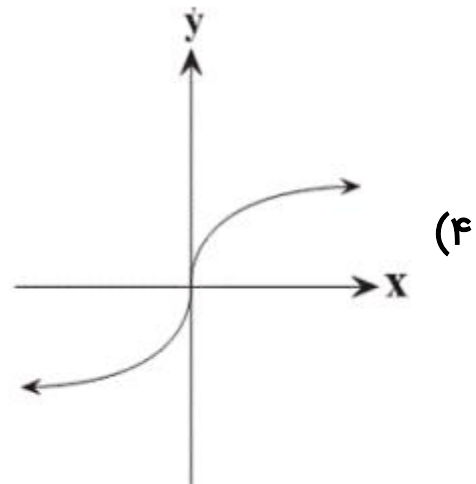
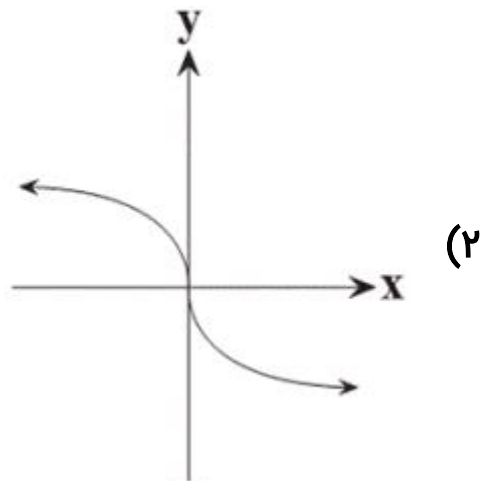
$\downarrow \quad \downarrow$
 $x_0 \quad y_0$

از (*) و (**) داریم:

$$f(5) = f^{-1}(3) \Rightarrow f(f(5)) = f(f^{-1}(3)) = 3$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $y_0 \quad x_0$

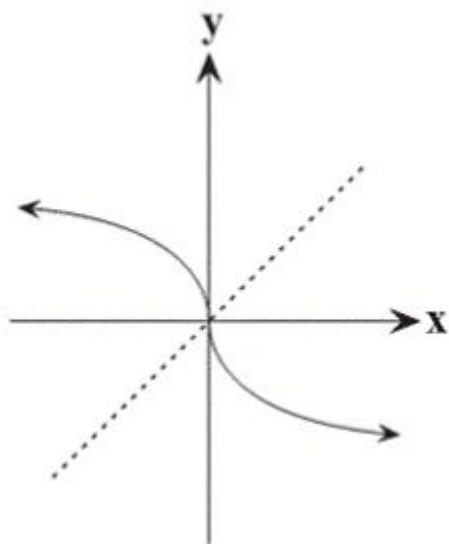
۱۱) نمودار وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & ; x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & ; x > 0 \end{cases}$ کدام است؟



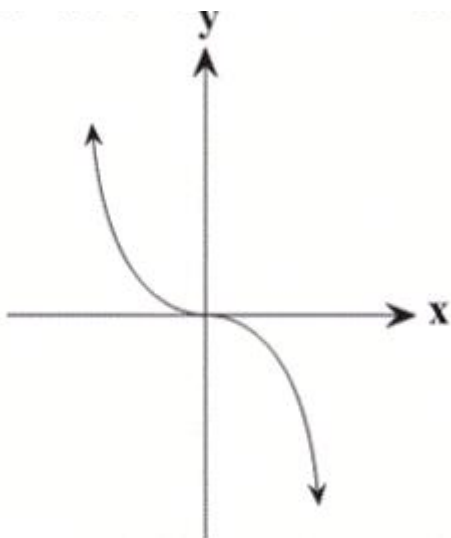
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا خود تابع را رسم می‌کنیم:



برای رسم وارون تابع، آن را نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم:



۱۲) اگر $f(x) = g(2x + 5)$ و $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{\lambda x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(4)$ کدام است؟

(۴) $-\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر $f^{-1}(4) = a$ باشد، آن‌گاه داریم: $f(a) = 4$. حال مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$f(a) = g(2a + 5) = 4 \Rightarrow 2a + 5 = g^{-1}(4)$$

$$\xrightarrow{g^{-1}(4) = \sqrt[5]{\lambda \times 4} = 2} 2a + 5 = 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

بنابراین: $a = f^{-1}(4) = -\frac{3}{2}$